GINO LORIA
PROFESSORE DELL' UNIVERSITÀ DI GENOVA

CURVE SGHEMBE SPECIALI

ALGEBRICHE E TRASCENDENTI

VOLUME SECONDO

CURVE SFERICHE - CURVE DEFINITE DA UNA RELAZIONE FRA FLESSIONE E TORSIONE - CURVE PARTICOLARI SITUATE SOPRA SUPERFICIE ASSEGNATE

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

K) Curve gnomoniche [1]).

Si consideri un'ordinaria meridiana delineata su una parete verticale, con uno stilo parallelo all'asse del mondo; in quale piano sono le curve dotate della prerogativa che l'ombra dello stilo stacchi su di esse archi eguali in tempi eguali?

---

[1]) G. Scheffers, *Ueber Sonnenuhrkurven* (Sitzungs bear. Berl. math. Gesell., T. VIII, 1909); E. Salkowski, *Katenoid und Sonnenuhrkurven* (Id. T. X, 1911).

Togliendo la condizione che tutto avvenga in un piano e spogliando l'enunciato di ogni considerazione fisica, si giunge a formulare il seguente

PROBLEMA. *Data una retta fissa* g, *determinare sopra una data superficie le curve dotate della seguente proprietà: se* A, B *sono due punti contigui di una delle linee richieste, l'arco* AB *è proporzionale all'angolo dei piani* gA, gB.

Le condizioni del problema possono evidentemente esprimersi mediante un'equazione della forma

$$ds = k \, . \, d\omega \tag{1}$$

k essendo una costante. Scelto come asse $0z$ la retta g quest'equazione si scrive

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = k \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \tag{2}$$

o, introducendo coordinate cilindriche,

$$\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2 + dz^2} = k \, . \, d\omega \, . \tag{3}$$

Assunto ϱ eguale ad una funzione arbitraria di ω la (3), con una quadratura, darà ϱ pure in funzione di ω e si otterrà così una classe di curve risolutrici del problema; se p. es. si assume

$$z = m\varrho$$

(se cioè si cercano le curve gnomoniche appartenenti al cono rotondo $z^2 = m^2(x^2 + y^2)$) la (3), con una scelta opportuna della costante d'integrazione, dà

$$\varrho = k \operatorname{sen} \frac{\omega}{\sqrt{1 + m^2}}$$

e quindi si arriva alle curve

$$x = k \operatorname{sen} \frac{\omega}{\sqrt{1+m^2}} \cos\omega \; , \quad y = k \operatorname{sen} \frac{\omega}{\sqrt{1+m^2}} \operatorname{sen}\omega \; , \tag{4}$$
$$z = km \operatorname{sen} \frac{\omega}{\sqrt{1+m^2}}$$

le quali sono algebriche se $\sqrt{1+m^2}$ è un numero razionale.

Per formarsi un concetto della distribuzione nello spazio delle curve in discorso, notiamo che, detti α, β, γ i coseni di direzione della tangente in un punto P di una di esse e con X, Y, Z i coseni di direzione della normale al piano Pg si ha

$$\alpha=\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\ ,\ \beta=\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\ ,\ \gamma=\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

$$X=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ Y=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ Z=0$$

onde la (2) diviene

$$\alpha X+\beta Y+\gamma Z=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{k}\ ,$$

equazione la quale mostra che *le tangenti in un punto* P *alle infinite curve gnomoniche passanti per questo punto costituiscono un cono di rotazione avente per asse la parallela condotta dal punto* P *alla retta* g.

Si scriva la (3) sotto la forma:

$$d\varrho^2+(\varrho^2-k^2)d\omega^2+dz^2=0$$

e si faccia

$$z=i\sigma\quad ,\quad k_1=ik\ ;$$

essa diverrà:

$$d\sigma^2=d\varrho^2+(k_1{}^2+\varrho^2)d\omega^2\ ;$$

ora siccome è questo l'elemento lineare della superficie generata dalla rotazione della catenaria attorno al proprio asse, così *ogni curva gnomonica è collegata ad un catenoide.*

Limitiamoci ad osservare, finendo, che, applicando la teoria delle equazioni a derivate parziali si arriva alle seguenti speciali curve gnomoniche:

$$\left\{\begin{aligned} x&=\sqrt{k^2-a^2\operatorname{sen}^2 t}\cos\left(a\int\frac{dt}{\sqrt{k^2-a^2\operatorname{sen}^2 t}}+b\right)\\ y&=\sqrt{k^2-a^2\operatorname{sen}^2 t}\operatorname{sen}\left(a\int\frac{dt}{\sqrt{k^2-a^2\operatorname{sen}^2 t}}+b\right)\\ z&=a^2\int\frac{\operatorname{sen}^2 t\,dt}{\sqrt{k^2-a^2\operatorname{sen}^2 t}}\ ,\end{aligned}\right.$$

le quali sono linee asintotiche di superficie di rotazione attorno alla data retta g.

Un'opera quale è la presente non è destinata a condurre ad alcuna conclusione di carattere generale. Tuttavia uno sguardo d'insieme alle pagine precedenti mette in luce due fatti e cioè:

1°. Fra le curve sghembe non ne venne segnalata alcuna dotata di singolarità altrettanto strane di quelle offerte dalle curve piane prive di tangenti benchè continue, o da quelle che riempiono tutta un'area.

2°. Tutte le linee da noi incontrate, se non sono algebriche, sono però proiettate da un punto qualunque su un piano qualunque secondo curve algebriche o panalgebriche, ond'è ragionevole formare con essa un'unica categoria i cui elementi è giustizia chiamare *curve sghembe panalgebriche*.