TEORIA GENERALE ED ANALITICA DI GNOMONICA E METODI PER CONOSCERE LA POSIZIONE DEI PIANI PER GLI OROLOGI SOLARI

MEMORIA

DELL'ARCHITETTO SAVERIO MARCHESANO
di Napoli.

Non vi ha parte delle matematiche scienze ai nostri giorni, alla quale applicata non siasi l'analisi o per dedurne sconosciute verità, o per dimostrarne in eleganti e generali modi quelle già note. Non cessa un tal metodo di prestar soccorso talvolta alle grafiche operazioni, benché in generale siano queste più semplici delle geometriche costruzioni delle formole analitiche, o del loro calcolo numerico. Che se talora di tal vantaggio andasse privo avrebbe però sempre un particolar pregio tutto proprio dell' analisi per quanto ha riguardo alla teorica. Per tali ragioni non ho creduto del tutto inutile questa teoria generale di gnomonica, che anzi, oltre all' aprire la via ad eleganti metodi grafici, contiene equazioni indispensabili in molti casi nei quali le geometriche costruzioni non possono eseguirsi o per le grandi dimensioni del disegno, o per mancanza di uno spazio conveniente. Ho trovato una semplice espressione analitica della lunghezza dell'ombra, che dipende dall'ora, dal giorno del mese, o dalla declinazione del sole, e dai dati di una posizione qualunque del piano dell'orologio. Si determina con quella in un modo generale la curva diurna segnata dall'estremità dell'ombra, la quale può trovarsi per punti mediante la costruzione dell' equazione ultima delle (7). Ho pure aggiunto un metodo grafico semplicissimo nel § II, per mezzo del quale si trova l'ascissa computata sull'equinoziale e l'ordinata corrispondente per un punto di una data curva diurna pel quale passa una data retta oraria o sostilare, come pure il suo incontro colla retta equinoziale; così si ottengono per punti la curva e le rette orarie, e l'altro ramo non ha bisogno di nuove costruzioni. Poichè queste equazioni e questi metodi grafici non sono applicabili all'orologio equinoziale, così ho trattato per questo una particolar teorìa nel §. IV. Quanto ho scritto nei §§ V e VI è tutto diretto all'utilità della pratica, onde conoscere i due angoli φ e θ pei quali è determinata la posizione di un piano sopra cui vogliasi descrivere l'orologio solare. I metodi per un piano qualunque esposti nel § V hanno tutti un particolar vantaggio.

Il primo fa conoscere φ per mezzo di θ, e dell'ora in cui il sole è nel dato piano, se ciò non è impedito da locali circostanze. È da preferirsi quando θ è noto, e ciò può avvenire quando è dato di posizione un piano parallelo all'equatore, e quindi può θ facilmente misurarsi.

Il secondo metodo richiede la meridiana sul dato piano, l'ora dell'arrivo del sole su di questo, e la misura di un dato angolo; riesce così facilissimo di conoscere φ, θ quando non vi é l'impedimento per cui diviene inutile anche il primo.

Il terzo ha il vantaggio di potersi fare l' osservazione in un'ora qualunque del giorno, ma richiede varie geometriche costruzioni, e l'equazione che ne risulta richiede un lungo calcolo. Semplicissima operazione è poi conoscere φ e θ per mezzo dell'equazioni che immediatamente seguono, l'ora però dell'osservazione non è arbitraria ma misurata dall'arco φ.

Il quarto metodo dà i due angoli per mezzo di osservazioni fatte in due volte ad ore arbitrarie.

Il quinto è molto più semplice degli altri, richiede la meridiana, e pochi calcoli, nè ha bisogno dell'ombra solare.

I tre metodi del § VI fanno nota l' inclinazione del piano verticale al meridiano (dalla quale si deducono gli angoli φ e θ) con una, o due, o tre facilissime osservazioni fatte ad ora qualunque. Il solo primo è dipendente dall'ora dell'osservazione.

Nei piani verticali si è finora usato per conoscere il dato angolo di misurare l'ombra di una data perpendicolare al solo mezzodì, e quando era orizzontale, metodi spesse volte ambedue impraticabili, restava l'unico di osservare un'astro di data posizione del cielo, metodo d'incommoda esecuzione, e per lo più impraticabili nei muri degli edifizii per masse sporgenti o per altre locali circostanze. Credo che tali difficoltà si possono del tutto evitare usando qualcheduno dei metodi più acconci al bisogno tra quelli da me esposti in questo opuscolo,

Sembra per tanto che questo mio lavoro per varii capi sia per riuscire in progresso della gnomonica, ed infatti altro questo non contiene, che il più semplice punto di veduta di quanto può a tale scienza appartenere, e se ne è scritto finora. In esso son comprese tutte le specie di orologi solari piani in due sole categorie, cioè polari e non polari. Le curve diurne sono discusse in generale, riferite a coordinate ortogonali, e polari, e determinati di posizione e grandezza i loro elementi. Generalissime e semplici sono le costruzioni geometriche delle formole, onde ottenere per punti le dette curve, alla quale semplicità forse non si perverrebbe con altre teoriche o geometriche considerazioni. Finalmente varii nuovi metodi si aggiungono, onde conoscere i dati che determinano la posizione dei piani. Le quali cose ben dimostrano che in questo mio qualsiasi lavoro sia contenuta la semplicità ed universalità dell'analisi colla facilità delle pratiche operazioni per ottenere con esattezza qualsivoglia orologio solare, il che é quanto può desiderarsi in tale trattato ed a cui forse niuno altro si è occupato seriamente di pervenire.

§. I.

EQUAZIONI DELLE CURVE DIURNE RIFERITE A COORDINATE ORTOGONALI E POLARI

1. La terra gira sul suo asse da occidente in oriente, questo è il moto diurno o di rotazione. Si muove ancora in un anno nel piano dell'ecclittica, e questo è il moto annuo o di rivoluzione. Il suo asse nelle successive posizioni è sempre a se stesso parallelo. Il piano che si concepisce condotto pel sole normale all'asse terrestre passa pel centro della terra quando questa è nei punti infimi dell'ecclittica, cioè nei punti equino-

ziali. La proiezione normale dell'asse terrestre sullo stesso piano passa pel sole quando la terra è nei punti supremi dell'ecclittica, cioè nei solstizii.

2. L'orbita terrestre benchè sia un'ellisse di breve eccentricità, pur si può assumere circolare senza tema di errore nelle seguenti ricerche. Il moto reale è della terra, e l'apparente è del sole; si può nondimeno supporre scambiato il movimento senza alterazione dei fenomeni. Si assumerà dunque per immobile la terra come se fosse nel centro dell'ecclittica, ed il sole si supporrà muoversi con un moto diurno ed annuo sulla periferia della stessa.

3. Sia CED, (Fig. 1) l'orbita diurna del sole, sarà sempre perpendicolare il suo piano all'asse terrestre prolungato FM. Il sole si muove da C verso D, e computandosi le ore dal mezzodì E sulla meridiana FE, ne avverrà che gli angoli orarii saranno positivi da E verso D, negativi da E verso C. Essendo inoltre equabile il moto diurno saranno gli angoli orarii EFa, EFb . . . . . proporzionali ai tempi.

4. Sia KU $=$ K la lunghezza dello gnomone, che si supporrà sempre parallelo all'asse terrestre, per un'orologio solare qualunque ed AB il profilo del suo piano, si formerà su di questo dall'ombra di K una sezione conica. Il cono è retto ed ha per base l'orbita diurna e circolare di raggio FD $=$ R, e per altezza KF $=$ Q. L'ora pomeridiana o antimeridiana espressa in gradi sulla base CED o su di un suo qualunque parallelo si dinoterà con $\pm$H. L'angolo orario sul piano dell'orologio, cioè quello che fa la sostilare colla meridiana corrispondente a $\pm$H s'indicherà con $\pm$ H$''$.

5. Sia U l'origine di tre assi ortogonali UZ, UX, UY paralleli all'asse terrestre FU, alla meridiana FE, ed alla perpendicolare FD, sarà la superficie conica riferita ai detti tre assi significata per l'equazione

$$(1) \qquad X^2 + Y^2 = \frac{R^2}{Q^2}(Z - K)^2.$$

Dal punto K conducasi KG parallela ad FD sarà l' angolo

$DKG = \delta =$ decl. del sole,

$$FKD = 90^\circ - \delta \, , \frac{R}{Q} = \tang(90^\circ - \delta) = \cot\delta .$$

I tre assi sono positivi da U verso K, verso D, e verso E, cioè dal piede dello gnomone verso il suo vertice, verso occidente, e verso il punto di mezzodì.

6. Un piano qualunque (Fig. 2), secante la detta superficie conica è dato di posizione per mezzo della sua inclinazione al piano dell' xy, e dell'angolo che la loro scambievole intersezione fa coll'asse dell'x. L'origine sia in O, DOC il piano secante determinato per l'inclinazione $DCB = \theta$, e per l'angolo $COB = \varphi$. Prendasi per nuovo asse dell' x' l'intersezione OCX', per quello dell'y' la retta ODY' esistente nel piano DOC e perpendicolare ad OCX', e per asse delle z' la retta OZ' normale al piano DOC; ed avvertasi che l'asse dell' x' è parallelo alla retta la quale descrive sul piano dell'orologio l'estremo dell'ombra dello gnomone quando il sole è nel piano dell' equatore, sarebbe cioè parallelo alla retta equinoziale.

7. Poichè non cercasi che l'equazione dell'intersezione sul piano DOC, dovrà mettersi nella nuova equazione della superficie conica $z' = 0$, e con ciò le coordinate x, y, z si avrebbero in funzione delle nuove x', y' z' per mezzo delle note formole

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= x'\cos(xx') + y'\cos(xy') \\ y &= x'\cos(yx') + y'\cos(yy') \\ z &= x'\cos(zx') + y'\cos(zy') \, . \end{aligned} \right.$$

Fa d'uopo ora esprimere i coseni dei diversi angoli che entrano in tali espressioni per mezzo dei soli φ e θ. A tal fine consideriamo l'origine O come il centro di una sfera di raggio 1 le cui intersezioni coi piani YOY', XOY', $X'OY'$, XOY' siano gli archi AD, BA, DC, DB; avremo così i due triangoli sferici DAC, DCB; nel primo dei quali sarà

$$AD = yy', \; DC = 90^\circ, \; AC = 90^\circ - \varphi,$$

e l'angolo DCA $= 180° - \theta$; nel secondo sarà

$$DC = 90°\ ,\quad BC = xx' = \varphi\ ,\quad DB = xy'\ ,\quad DCB = \theta.$$

8· D'altronde questi triangoli danno

$$\cos DB = \cos DC \cos CB + \operatorname{sen} DC \operatorname{sen} CB \cos DCB$$

$$\cos DA = \cos DC \cos CA + \operatorname{sen} DC \operatorname{sen} CA \cos DCA$$

nelle quali equazioni sostituendo i corrispondenti valori si otteranno

$$\cos(xy') = \operatorname{sen}\varphi \cos\theta\ ,\quad \cos(yy') = -\cos\varphi \cos\theta$$

Poichè l' asse dell' x' trovasi nel piano dell' xy, sarà OZ perpendicolare ad OX', e quindi $\cos(zx') = 0$, di più trovandosi OZ ed OY' nel piano dell'angolo che misura l'inclinazione θ, sarà

$$\text{ang}.zy' = 90° - \theta\ ,\quad \cos(zy') = \operatorname{sen}\theta.$$

Sostituiti tutti questi valori nelle (2) si ottengono le altre

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi + y'\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ y &= x'\operatorname{sen}\varphi - y'\cos\varphi\cos\theta \\ z &= y'\operatorname{sen}\theta\ . \end{aligned}\right.$$

Sostituendo queste espressioni nell' equazione (1), ne risulta quella dell' intersecazione riferita ai due assi ortogonali OX', OY', cioè

$$(4)\qquad x'^2 + y'^2\cos^2\theta = \cot^2\delta(y'\operatorname{sen}\theta - K)^2$$

9. Sul piano dell'xy chiamato H l'angolo compreso dall'asse dell'x, e da un raggio della base il cui estremo ha per coordinate x, y, si ha

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tang} H\ ,$$

cioè per le (3)

$$\operatorname{tang} H = \frac{x'\operatorname{sen}\varphi - y'\cos\varphi\cos\theta}{x'\cos\varphi + y'\operatorname{sen}\varphi\cos\theta}\ ,$$

e risolvendo per x' si ottiene

$$(5) \qquad x' = y' \cos\theta \frac{\tang\varphi \tang H + 1}{\tang\varphi - \tang H} = y' \cos\theta \cot(\varphi - H).$$

Eliminando per mezzo della (5) e (4) successivamente x' ed y' si avrà da quest'ultima

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} y' &= \frac{K \sec\theta}{\tang\theta \pm \tang\delta \operatorname{cosec}(\varphi - H)} \\ x' &= \frac{K \cot(\varphi - H)}{\tang\theta \pm \tang\delta \operatorname{cosec}(\varphi - H)} \cdot \end{aligned} \right.$$

Queste due equazioni daranno ciascun punto della curva corrispondente ad un'ora data H pomeridiana, ed avvertasi che quando H è antimeridiana si avrà $\varphi + H$ invece di $\varphi - H$.

10. Riesce talvolta anche agevole nella pratica l'uso di coordinate polari; esprimendo con U il raggio vettore, cioè la lunghezza della sostilare, e con H'' l'angolo regolatore, cioè l'angolo orario definito al n.° 4, l'equazioni generali danno

$$U = \frac{y'}{\operatorname{sen} H''}, \quad \frac{y'}{x'} = \tang H''.$$

Ma la (5) dà

$$\frac{y'}{x'} = \sec\theta \tang(\varphi \pm H),$$

dunque ricavandone

$$\operatorname{sen} H'' = \frac{1}{\sqrt{[1 + \cos^2\theta \cot^2(\varphi \mp H)]}},$$

e prendendo y' dalla prima delle (6) si otterrà

$$
(7)\quad \left\{\begin{aligned}
&\operatorname{tang} H'' = \sec\theta \operatorname{tang}(\varphi \mp H)\\
&U = \frac{K\sqrt{[1+\operatorname{tang}^2\theta \operatorname{sen}^2(\varphi \mp H)]}}{\operatorname{tang}\theta \operatorname{sen}(\varphi \pm H) \mp \operatorname{tang}\delta}\,.\\
&\text{Ovvero usando un'angolo ausiliario}\\
&\operatorname{tang}\theta \operatorname{sen}(\varphi \mp H) = \operatorname{tang}\mu\\
&U = \frac{K\sec\mu}{\operatorname{tang}\mu \pm \operatorname{tang}\delta}\,.
\end{aligned}\right.
$$

§. II.

METODO GRAFICO PER DETERMINARE LE CURVE DIURNE, ED APPLICAZIONE DELLE EQUAZIONI GENERALI ALLE PRINCIPALI SPECIE DI OROLOGI SOLARI.

1. Siano OX′, OY′ (fig. 3) i due assi ortogonali del paragrafo antecedente, O′X″ la retta equinoziale parallela ad OX′, OM la meridiana, O il piede dello gnomone, si avrà OO′ facendo $\operatorname{tang}.\delta = 0$ nella prima delle (6), ne risulterà cioè

$$OO' = \frac{K}{\operatorname{sen}\theta}\,.$$

Dalla prima delle (7) posto $H = 0$ si avrà

$$(a)\quad \operatorname{tang}(O'OM) = \sec\theta \operatorname{tang}\varphi\,,\quad \operatorname{tang}(O'MO) = \cos\theta \cot\varphi.$$

Si trasporti l'origine da O in O′ sulla retta equinoziale saranno le nuove coordinate delle curve diurne

$$y'' = y' - \frac{K}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{K \operatorname{cosec}\theta}{\mp \operatorname{tang}\theta \cot\delta \operatorname{sen}(\varphi \mp H) - 1}$$

$$x'' = x' = \cot\delta \operatorname{sen}\theta \cos(\varphi \mp H) y''.$$

Costruiti i seguenti valori costanti per una stessa curva, siano

$$\cot\delta \operatorname{tang}\theta = m\,,\ \frac{K}{\operatorname{sen}\theta} = n\,,\ \cot\delta \operatorname{sen}\theta = p\,,$$

e quindi

$$(b)\quad y''=\frac{n}{\mp m\,\mathrm{sen}(\varphi\mp \mathrm{H})-1},\quad x''=p\cos(\varphi\mp \mathrm{H})y'':$$

ecco in qual modo si potranno determinare i valori lineari d' x'' e d' y'' corrispondenti ad un punto di una curva diurna, per cui passa la retta oraria ed europea dell'ora $\pm$ H.

2. Nel semicerchio DACE (Fig. 4) di raggio CB $=1$ conducasi il raggio BC perpendicolare al diametro DE, e facciasi l'angolo ABC $=\varphi\mp$ H. Tagliata BF $=m$, ed abbassata la perpendicolare FM, sarà BM $=$ sen $(\varphi\mp \mathrm{H})$.

Affine di ottenere il ramo di curva diurna che più si avvicina alla retta equinoziale, dovrà prendersi il minor valore d' y'', cioè far valere il segno superiore, e sarà

$$\mathrm{ME}=m\,\mathrm{sen}(\varphi\mp \mathrm{H})+1.$$

Dal punto E s'innalzi a DE la perpendicolare NQ, e prendasi NE $=n$, congiungasi MN, condotta la parallela BP, sarà PE $=y''$. Si tagli BG $=p$, abbassata la perpendicolare GQ, sarà EQ $=p$ cos$(\varphi\mp$ H); descritto finalmente il semicerchio sarà SE $=x''$.

3. Le due ottenute coordinate darebbero un solo punto della retta oraria, laonde è necessario di conoscerne almeno un' altro. Pertanto affin di ritrovare l'incontro della nominata retta coll'equinoziale mettasi nelle equazioni (b) tang $\delta=0$, si avrà con ciò

$$(c)\qquad y''=0,\ x''=\mathrm{K}\cot\theta\cot(\varphi\mp \mathrm{H}).$$

L'ultima che si ricava dalla seconda delle (b) è di sì facile costruzione che appena merita di essere rammentata.

Nel quadrante ACB (Fig. 5) si elevi la perpendicolare indefinita BF, e si conduca la DE parallela a CB e distante dalla stessa per GL $=$ K cot θ. Per l'ora $\pm$ H facciasi l' angolo FCB $=\varphi\mp$ H, da G suo punto d'incontro con DE si abbassi la GL perpendicolare a CB, sarà CL $=x''$, infatti

$$\frac{GL}{CL} = \text{tang}(\varphi \mp H) = \frac{K \cot \theta}{CL},$$

cioè

$$CL = \pm K \cot \theta \cot(\varphi \mp H).$$

4. Sono dati in tal modo due punti della retta oraria, e quindi è determinata, si otterrebbe eziandio per punti il ramo della curva diurna più vicino all'equinoziale. Per ottenere l'altro ramo avvertasi che è identico al primo, che il suo asse AA' coincide colla direzione di O'Y', ad è (§. III n. 1)

$$(e) \qquad AA' = \frac{2K \text{ sen } \theta}{\text{tang}^2 \delta \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta}.$$

Prima di cominciare tali descrizioni è necessario di tracciare sul dato piano la meridiana OM, di condurre l' equinoziale MX'' inclinata ad angolo OMO', si dovrà inoltre stabilire l'origine O' distante da M per O'M, ed avvertasi che

$$(f) \qquad \text{tang}(OMO') = \cos \theta \cot \varphi,$$

$$(g) \qquad O'M = (OO') \text{ tang}(MOO') = \frac{K \text{ tang}\varphi}{\text{sen } \theta \cos \theta}.$$

5. L'equazioni (7) valgono per una posizione qualunque del piano dell'orologio, eccetto se è parallelo all'asse terrestre, sarebbe infatti in questo caso $\theta = 90^\circ$, il che dà per le (7) $H'' = 90^\circ$, $U = K$ per qualunque ora; essendo dunque allora insufficienti le nominate equazioni si ricorrerà ad un'altra teoria. Non così avviene in altra circostanza, ed eccone le principali applicazioni.

Orologio equinoziale — Appellasi così quello descritto su di un piano perpendicolare all'asse terrestre, e che passa quindi pei punti equinoziali. In esso si ha $\theta = 0$, e le (7) danno

$$H'' = \varphi \mp H, \quad U = \pm K \cot \delta.$$

L'angolo φ può essere arbitrario, ed anche nullo, le curve diurne sono circonferenze di raggio K cot δ.

6. Orologio orizzontale — Dicesi così quello segnato su di un piano orizzontale, in esso si ha $\theta = 90° - L$, essendo L la latitudine geografica, $\varphi = 90°$, e le (7) danno

$$\tang H'' = \pm \operatorname{cosec} L \cot H \ , \quad U = \frac{K\sqrt{(\cot^2 L \cos^2 H + 1)}}{\cot L \cos H \pm \tang \delta} ,$$

e le (b) danno

$$y'' = \frac{n}{\mp m \cos H - 1} , \ x'' = \pm p y'' \operatorname{sen} H \ ,$$

nelle quali é

$$\cot \delta \cot L = m \ , \quad K \sec L = n \ , \quad \cot \delta \cos L = p .$$

Quando $L = 90°$ ritornano l'equazioni dell'orologio equinoziale, ed infatti è questo orizzontale nei poli.

7. Orologio verticale — Il suo piano passa sempre per la verticale del luogo, e gli angoli φ e θ variano secondo la latitudine L, e l'angolo ψ che il piano verticale fa col meridiano. Questi due piani e l'equatore formano un triangolo sferico rettangolo, di cui un cateto è la latitudine L, l'angolo adiacente è ψ, l'angolo opposto è θ, l'altro cateto è φ; risolvendolo ne derivano

$$(8) \qquad \cos \theta = \operatorname{sen} \psi \cos L \ , \ \tang \varphi = \tang \psi \operatorname{sen} L ,$$

se fosse $\psi = 90°$ il piano verticale sarebbe perpendicolare al meridiano, ed avrebbesi

$$\varphi = 90° , \quad \theta = L$$

$$\tang H'' = \pm \operatorname{sen} L \cot H , \quad U = \frac{K\sqrt{(\tang^2 L \cos^2 H + 1)}}{\tang L \cos H \pm \tang \delta} .$$

8. Si possono oltre le principali posizioni preferire talune altre per cui divengono molto semplici le generali equazioni. Quando è $\varphi = 0$, $\theta = 45°$ il piano è verticale sull'equatore, e l'angolo $\psi = 45°$, le (7) allora divengono

$$\tang H'' = \pm \sqrt{2} \tang H \ , \quad U = \frac{K \sqrt{(1 + \operatorname{sen}^2 H)}}{\pm \operatorname{sen} H \pm \tang \delta}$$

le (b) danno

$$y'' = \frac{K\sqrt{2}}{\mp \cot\delta \operatorname{sen} H - 1},$$

$$x'' = y'' \frac{\cot\delta}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} H = \frac{K}{\mp 1 - \operatorname{tang}\delta \operatorname{cosec} H}.$$

In generale si hanno semplificazioni simili sempre che $\varphi = 0$, cioè per tutti i piani verticali sull'equatore.

L'angolo $\varphi = 90°$ appartiene a tutti i piani normali al meridiano, i quali sono verticali alla latitudine geografica eguale a θ. Se inoltre si avesse $\theta = 45°$, le (7) e le (6) si avrebbero sostituendo ad H il suo complemento nelle due equazioni ora trovate.

L'equazioni generali divengono più semplici in determinate ore, ma le noterò solo pei piani verticali sull'equatore, e per quelli normali al meridiano, esse sono le stesse per entrambi, ma le ore sono inverse quelle pei primi sono notati a sinistra, quelle pei secondi a destra

Quando $\varphi = 0$ Ora			Quando $\varphi = 9$
H	tang H″	U	H
$= 0^\circ$	$= 0$	$= \dfrac{K}{\pm \text{tang}\,\delta}$	$\pm 90^\circ$
± 15	$\mp \sec\theta\, \text{tang}(15^\circ)$	$\dfrac{K\sqrt{[1 + \text{tang}^2\theta\, \text{sen}^2(15^\circ)]}}{\text{tang}\,\theta\, \text{sen}(15^\circ) \pm \text{tang}\,\delta}$	$\pm 75^\circ$
$\pm 30^\circ$	$\mp \dfrac{\sec\theta}{\sqrt{3}}$	$\dfrac{K\sqrt{(4 + \text{tang}^2\theta)}}{\text{tang}\,\theta \pm 2\, \text{tang}\,\delta}$	$\pm 60^\circ$
$\pm 45^\circ$	$\mp \sec\theta$	$\dfrac{K\sqrt{(2 + \text{tang}^2\theta)}}{\text{tang}\,\theta \pm \sqrt{2}\, \text{tang}\,\delta}$	$\pm 45^\circ$
± 60	$\mp \sec\theta \sqrt{3}$	$\dfrac{K\sqrt{(4 + 3\, \text{tang}^2\theta)}}{\sqrt{3}\, \text{tang}\,\theta \pm 2\, \text{tang}\,\delta}$	$\pm 30^\circ$
± 75	$\mp \sec\theta \cot(15^\circ)$	$\dfrac{K\sqrt{[1 + \text{tang}^2\theta \cos^2(15^\circ)]}}{\text{tang}\,\theta \cos(15^\circ) \pm \text{tang}\,\delta}$	$\pm 15^\circ$
± 90	$\mp \infty$	$\dfrac{K}{\text{sen}\,\theta \pm \cot\theta\, \text{tang}\,\delta}$	± 0
Quando $\theta > 45^\circ \pm \text{arc}(\text{sen} = \cot\theta)$	$\mp \dfrac{\sec\theta}{\sqrt{(\text{tang}^2\theta - 1)}}$	$\dfrac{K\sqrt{2}}{1 \pm \text{tang}\,\delta}$	$\pm \text{arc}(\text{sen} = \text{tan}$
Quando $\theta < 45^\circ \pm \text{arc}(\text{sen} = \text{tang}\,\theta)$	$\mp \dfrac{\sec\theta\, \text{tang}\,\theta}{\sqrt{(1 - \text{tang}^2\theta)}}$	$\dfrac{K\sqrt{(1 + \text{tan}^4\theta)}}{\text{tang}^2\theta \pm \text{tang}\,\delta}$	$\pm \text{arc}(\text{sen} = \text{co}$

§. IV.

ELEMENTI DELLE CURVE DIURNE, E CRITERIO DE' SEGNI DI φ E DI U.

1. Sia FAC il cono formato dai raggi solari, BE la sezione del piano dell'orologio, sarà

$$AB = K\,,\quad \frac{AB}{BC} = \operatorname{tang}\delta\,,\quad ABD = 90^\circ - \theta\,.$$

Inoltre nel triangolo DBC è dato DBC $= \theta$, BCD $= \delta$, adunque

$$BD = K \cot\delta \frac{\operatorname{sen}(DCB)}{\operatorname{sen}(\theta + DCB)} = \frac{K}{\operatorname{tang}\delta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$$

Similmente pel triangolo EAB si deduce

$$EB = \frac{K}{\operatorname{tang}\delta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}\,.$$

Si conosce dalla semplice ispezione della figura che le curve d'intersezione sono ellittiche quando è $\theta < \delta$, sono iperboliche se $\theta > \delta$, sono paraboliche se $\theta = \delta$, e che l'espressioni analitiche delle distanze BD, EB sono le stesse per le prime due, sono di segno diverso nelle prime, e del medesimo nelle seconde. È chiaro finalmente che l'asse DE$=2a$ nell' ellisse è la somma di BD e di BE, nell'iperbola ne è la differenza. Da ciò se ne deduce che in ambedue i casi è il semiasse

$$a = \frac{DE}{2} = DS = \frac{BE - DE}{2} = \frac{K\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{tang}^2\delta\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}\,.$$

L'analisi poi fa conoscere l'altro semiasse

$$b = \frac{K}{\sqrt{(\operatorname{tang}^2\delta - \operatorname{tang}^2\theta)}}\,,$$

ed il parametro della parabola $= 2\cot\theta\cos\theta$.

2. Dopo aver posto nella seconda delle (7) $\varphi \mp H = 90^\circ$

si ottengono per U i due valori di BE e DE, potranno questi render ragione del doppio segno del denominatore di U, e regolarne la scelta. Trovati colle precedenti equazioni gli elementi di ogni specie di curve diurne, son queste determinate di grandezza e non di posizione, ma sarà tolta ogni difficoltà avvertendo, che l'asse principale coincide colla perpendicolare che sull'equinoziale si abbassa dal piede dello gnomone, e che la distanza di questo dai rispettivi centri è

$$SB = BD + DS = BD + a$$

$$= \frac{K}{\tan\!g\,\delta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta} + \frac{K\operatorname{sen}\theta}{\tan\!g^2\delta\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta} = \frac{K\tan\!g\,\delta\cos\theta}{\tan\!g^2\delta\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}$$

Condotta AT parallela a FC sarà AT il profilo dell'equatore, ST la distanza del centro dall'equinoziale, e si avrà

$$ST = SB - TB = \frac{K\tan\!g\,\delta\cos\theta}{\tan\!g^2\delta\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta} - \frac{K}{\operatorname{sen}\theta}.$$

L'angolo θ si assume sempre come positivo, pel doppio segno di φ può stabilirsi dopo le necessarie considerazioni, che quando la superficie del piano è ad oriente rispetto all'asse terrestre è φ negativo, quando è ad occidente è positivo.

3. Il profilo della superficie piana dell'orologio sia FE, (Fig. 7), e termini nella superficie cilindrica FGDE appartenente ad un cilindro che ha per asse lo gnomone CB, per generatrice una parallela allo stesso, e per direttrice il cerchio di raggio $FB = r'$. Condotto il piano GD parallelo a FE pel piede C dello gnomone $BC = FG = ED = K$, saranno le curve delle ombre lunghissime segnate sulla detta superficie cilindrica. Infatti chiamando ϑ la distanza dalla sezione inferiore GD del punto d'incontro dell' ombra lunghissima U' colla nominata superficie, si avrebbe

$$K : U' :: \vartheta : U' - r', \quad \text{cioè} \quad T = K\left(1 - \frac{r'}{U'}\right).$$

Per separare poi tra loro le curve si potrebbe sovrapporre a BC l'altro gnomone $AB = nK$ come suo prolungamento ed in nodo da non covrire colla sua ombra i vertici di $BC = K$. Sarebbero così le distanze scambievoli delle curve segnate sul piano FE n volte maggiori di quelle segnate da K sul piano GD.

4. Il minimo di tutti i valori possibili dell'espressione generale di U è $K\cot(23°\,28')$, adunque dovrà essere

$$n\, K\cot(23°\,28') > r',\ \text{cioé}\ n > \frac{r'}{K}\tang(23°\,28').$$

Quanto si è detto è applicabile per ogni posizione del piano dell'orologio, molto più, quando questo è equinoziale. Nell'orologio polare potrebbe praticarsi una sola altezza di gnomone, ed uno o due piani normali al piano dell' orologio, paralleli alla meridiana, ed egualmente alti che lo gnomone per segnarvi le rette orarie per cui Δ nell'ultima delle (9) fosse lunghissima.

§. VI.

OROLOGIO POLARE.

1. L'orologio polare è quello segnato sopra un piano parallelo all'asse terrestre. Per questo non valendo le precedenti formole, si dovrà ricorrere alla seguente teoria.

La retta hA sia l' asse terrestre (Fig. 8), ovvero la linea dello gnomone parallelo al piano dell'orologio BGDY. Il piano che si conduce per l'asse normale a BGDY sia MhAY, la distanza di hA da BGDY sarà $hM = AY = K'$. Il circolo EBCL sia l'orbita diurna, e base del cono, DE la meridiana, in E il mezzodì, in C l'oriente, e l'angolo $ADB = \varphi$. La sezione del piano GBYD colla superficie conica sarà l'iperbole NGB.

2. Dopo essersi riferita la superficie conica al nuovo sistema $MX'Y'Z'$, i cui assi sono rispettivamente paralleli a YB, AF, Ah, dovrà mettersi $y' = 0$ nella trasformata per aversi dalla risultante l'equazione della sezione conica NGB. Pertanto si ha per questa mutazione di coordinate

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(xx') + z' \cos(xz') + m, \\ y &= x' \cos(yx') + z' \cos(yz') + n, \\ z &= x' \cos(zx') + z' \cos(zz') + p, \end{aligned}$$

come pure

$$\cos(xx') = \cos\varphi\ ,\ \cos(xz') = \cos(yz') = \cos(zx') = 0\ ,$$
$$\cos(yx') = \operatorname{sen}\varphi,\ \cos(zz') = 1,\ m = -\mathrm{K}'\operatorname{sen}\varphi\ ,$$
$$n = \mathrm{K}'\cos\varphi\ ,\ p = 0\ ,$$

ed i tre valori antecedenti dopo le necessarie sostituzioni divengono

$$x = x'\cos\varphi - \mathrm{K}'\operatorname{sen}\varphi\ ,\ y = x'\operatorname{sen}\varphi + \mathrm{K}'\operatorname{sen}\varphi\ ,\ z = z'.$$

Queste equazioni combinate colla prima (1), e fattovi $\mathrm{K} = 0$, ne risulta

$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{K}'^2 = \mathrm{Z}'^2 \cot^2\delta\ ,$$

equazione che appartiene ad un'iperbola, i cui semiassi sono $\mathrm{K}'\operatorname{tang}\delta$ e K' senza veruna dipendenza dall'angolo φ, e che è la sezione cercata.

3. Un lato qualunque del cono, per esempio $h\mathrm{L}$ passa pei due punti h ed L, i quali riferiti agli assi MX', MY' hanno per coordinate

$$x' = -\mathrm{LF} = -\mathrm{LA}\cos(\mathrm{DAL} + \mathrm{ADB}) = -\mathrm{R}\cos(180^\circ + \varphi - \mathrm{H})$$
$$= \mathrm{R}\cos(\varphi - \mathrm{H})\ ,$$
$$z' = -h\mathrm{A} = -\mathrm{Q}\ ,\quad x'' = z'' = 0\ ,$$

che però la sua projezione sul piano secante X'MY' ha per equazione

$$x = \cot\delta\cos(\varphi - \mathrm{H})z\ ,$$

e passa pel punto M.

L'angolo che la detta projezione fa coll'asse MZ' ha per tangente $\cot\delta\cos(\varphi - \mathrm{H})$, ed è appunto l'angolo regolatore H'' corrispondente all'ora H, adunque

$$\operatorname{tang}\mathrm{H}'' = \cot\delta\cos(\varphi - \mathrm{H}).$$

Le ore son determinate dalla distanza delle ombre parallele dalla retta MY, sia dunque il sole in un meridiano qualunque per esempio $\mathrm{L}h\mathrm{A}$, la distanza dell'ombra da MY sarà

$$nY = \pm \Delta,$$

ma

$$\frac{nY}{K'} = \cot\,(DAL + ADB) = \cot(\varphi - H),$$

adunque

$$\pm \Delta = K' \cot(\varphi - H)\ ;$$

essendo inoltre

$$U = \frac{\pm \Delta}{\operatorname{sen} H''}, \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} H'' \frac{1}{\sqrt{[1 + \operatorname{tang}^2 \delta \sec^2 (\varphi - H)]}}$$

sarà determinata la curva da

$$(9) \quad \begin{cases} \pm \Delta = K' \cot\,(\varphi - H) \\ \pm U = K' \operatorname{tang} \delta \sqrt{\left(1 + \dfrac{\cot^2(\varphi - H)}{\operatorname{sen}^2 \delta}\right)}. \end{cases}$$

4. Avendosi $\varphi = 0$ il piano si confonderà col meridiano, ed essendo $\varphi = 90^\circ$. sarà ad esso perpendicolare, le (9) allora daranno

Ore per $\varphi=0$	Valori di $\pm\ \Delta$	Valori di $\pm$ UK	Ore per $\varphi=90$
90°	0	$K' \operatorname{tang} \delta$	0
75°	$K' \left(\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{3}}\right)$	$K' \operatorname{tang} \delta \sqrt{\left(1 + \frac{(\sqrt{7}-2)^2}{3 \operatorname{sen}^2 \delta}\right)}$	15°
60°	$\frac{2K'}{\sqrt{3}}$	$K' \operatorname{tang} \delta \sqrt{\left(1 + \frac{4}{3 \operatorname{sen}^2 \delta}\right)}$	30°
45°	K'	$K' \operatorname{tang} \delta \sqrt{(2 + \cot^2 \delta)}$	45°
30°	$\frac{K'\sqrt{3}}{2}$	$K' \operatorname{tang} \delta \sqrt{\left(1 + \frac{3}{4 \operatorname{sen}^2 \delta}\right)}$	60°
15°	$\frac{K'\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2}$	$K' \operatorname{tang} \delta \sqrt{\left(1 + \frac{3}{(\sqrt{7}-2)^2 \operatorname{sen}^2 \delta}\right)}$	75°
0°	∞	∞	90°

§. V.

METODI PER CONOSCERE GLI ANGOLI φ e θ PER UN PIANO QUALUNQUE.

1. Metodo primo per conoscere φ. Fissato il piano (Fig. 9) si osservi l'ora in cui è oscurato da leggiera penombra, ed in cui corte perpendicolari investite da luce brillante projettano ombra indefinita parallela al piano. Chiamata $\pm h$ quest' ora l'angolo φ si conoscerà dalla seguente equazione in funzione di θ

$$(10)\left\{\begin{array}{l}\tang\varphi=\dfrac{\pm\operatorname{sen}h}{\cos h+\dfrac{\cot\theta\tang\delta}{\operatorname{sen}\varphi}}, \\ \text{da cui si ha} \\ \tang\varphi=\dfrac{\pm\operatorname{sen}h\cos h\pm\cot\theta\tang\delta\sqrt{(1-\cot^2\theta\tang^2\delta)}}{\cos^2h-\cot^2\theta\tang^2\delta}.\end{array}\right.$$

Sia KCE il meridiano, FBD il dato piano, BF la meridiana, sarà

$$\mathrm{EBD}=\varphi,\quad \mathrm{ECD}=\pm h,\quad \mathrm{AC}=\mathrm{Q},\quad \mathrm{CD}=\mathrm{R},$$

e pel triangolo sferico rettangolo B*acb* sarà

$$\tang\mathrm{CBA}=\operatorname{sen}\varphi\tang\theta,\ \mathrm{BC}=\frac{\mathrm{Q}\cot\theta}{\operatorname{sen}\varphi},$$

$$\tang\mathrm{EBD}=\tang\varphi=\frac{\pm\mathrm{R}\operatorname{sen}h}{\mathrm{R}\cos h+\mathrm{BC}}=\frac{\pm\operatorname{sen}h}{\cos h+\dfrac{\tang\delta\cot\theta}{\operatorname{sen}\varphi}}.$$

2. Metodo secondo indipendente da θ. Segnata sul dato piano la meridiana BF si abbassi sulla stessa la verticale AM. Misurato l'angolo FAM $=$ M verso il zenit e verso l'emisfero opposto a quello in cui trovasi il sole, ed avvertendo che l' inclinazione di AM a BE é eguale alla latitudine geografica L,

si ha

$$CBA = M \pm L < 90^\circ,$$

e quindi

$$\text{tang}(M \pm L) = \text{sen}\,\varphi\ \text{tang}\ \theta,\ \cot\theta = \frac{\text{sen}\,\varphi}{\text{tang}(M \pm L)},$$

che sostituita nella prima delle (10) dà

$$(11)\qquad \text{tang}\ \varphi = \frac{\pm\ \text{sen}\,h}{\cos h + \text{tang}\ \delta \cot(M \pm L)}.$$

3. Per mezzo del triangolo sferico B*abc* si ottiene

$$(12)\qquad \text{tang}\ \theta = \text{cosec}\ \varphi\ \text{tang}(M \pm L).$$

Dopo le osservazioni del numero antecedente sarà noto $(M \pm L)$, dalla (11) si troverà cosec φ, per cui la (12) diviene

$$(13)\quad \text{tang}\,\theta = \pm\sqrt{\left[\left(\frac{\text{tang}(M \pm L)}{\text{sen}\,h} + \cot h\ \text{tang}\delta\right)^2 + \text{tang}^2\delta\right]}$$

4. Metodo terzo per conoscere φ e θ in qualsivoglia ora. Le ricerche ora esposte non valgono che per l'unica ora in cui il sole è nel dato piano; riuscendo talora inutili, ed essendo difficile nelle pratica di fissare con esattezza la nominata ora, si procederà invece nel seguente modo, che vale per un' ora qualunque.

La meridiana segnata sul piano sia la retta MM′ (Fig. 10) Da un punto qualunque K′ si abbassi sulla stessa la verticale misurata K′P. Si avrà l'angolo K′PM′ = M misurato come innanzi si é detto, ed essendo K′M′ lo gnomone K, sarà l'angolo PK′M′ = 90° — L. Dopo ciò sarà dato PK′M′, e geometricamente o col calcolo potrà determinarsi la lunghezza K′M′=K, PM′, ed il punto M′ piede di K.

In ora qualunque $\pm h$ si segni sul piano il punto Q estremo dell' ombra PQ della verticale PK′. sarà dato QM′ = U. Dopo di avere eliminato tang θ per mezzo della (2) dalla seconda delle (7) si otterrà

$$(14)\quad \frac{QM'}{K} = m = \frac{\sqrt{[\text{cosec}^2\varphi\ \text{sen}^2(\varphi \pm h)\text{tang}^2(M \pm L) + 1]}}{\text{cosec}\ \varphi\ \text{sen}(\varphi \pm h)\ \text{tang}(M \pm L) \pm \text{tang}\ \delta}.$$

Mettasi

$$\operatorname{cosec}\varphi\,\operatorname{sen}(\varphi\pm h)\operatorname{tang}(M\pm L)=\mu\,,$$

si avra

$$m=\frac{\sqrt{(\mu^2+1)}}{\mu\pm\operatorname{tang}\delta}\,,$$

da cui ricavasi

$$\mu=\frac{\mp m^2\operatorname{tang}\delta\pm\sqrt{[m^4\operatorname{tang}^2\delta+(m^2\operatorname{tang}\delta-1)(1-m^2)^2]}}{1-m^2}\,,$$

essendo poi

$$\cos h\mp\cot\varphi\,\operatorname{sen}h=\frac{\mu}{\operatorname{tang}(M\pm L)}$$

sarà

$$\mp\cot\varphi=\frac{\mu\cot(M\pm L)}{\operatorname{sen}h}-\cot h\,,$$

e sostituito il trovato valore di μ, si ha finalmente

$$(15)\quad\mp\cot\varphi=\frac{\mp m^2\operatorname{tang}\delta\pm\sqrt{[m^4\operatorname{tang}^2\delta+(m^2\operatorname{tang}\delta-1)(1-m^2)^2]}}{\operatorname{sen}h(1-m^2)\operatorname{tang}(M\pm L)}-\cot h.$$

Quest' equazione è inutile per l' ora di mezzodì perchè M'Q coincide colla meridiana MM'.

5. Il metodo precedente può applicarsi diversamente. Conosciuto il piede M' di K e la sua lunghezza colla sola costruzione del triangolo PK'M', descrivasi un' arco di cerchio sul piano col centro in M' e con raggio $M'Q=K\cot\delta$, essendo δ la corrispondente declinazione, sia $\pm h$ l'ora in cui l'estremo dell'ombra di K'P tocca il descritto arco, si avrà

$$(16)\quad\left\{\begin{array}{l}\varphi=\pm h\\ \operatorname{tang}\theta=\pm\operatorname{cosec}h\operatorname{tang}(M\pm L)\end{array}\right.$$

e sarà così pienamente risoluto il problema. Si ha poi la prima eguaglianza perchè dalla seconda delle (7) si ha $U=K\cot\delta$ quando è $\varphi\mp h=0$.

6. Quarto metodo per conoscere φ e θ in un'ora qualunque. Fatta l'osservazione, come si è detto, si abbassi la perpen-

dicolare QC sulla meridiana MM', e misuratala mettasi QC=P, e la distanza di C da un punto qualunque preso sulla direzione di MM' per esempio CM = D, e quella del preso punto M da M' eguale ad X. Dopo una seconda osservazione simile ed alla stessa ora si abbiano i dati P', D' dovranno essere eguali i due angoli QM'M, e quindi si avrà

$$\frac{P}{X-D}=\frac{P'}{X-D'}=\text{tang}(QM'M)=\text{tang}\,H''$$

eliminato X sarà

$$\text{tang}\,H''=\frac{P-P'}{D'-D}=T,$$

e per la prima delle (7)

$$\sec\theta=T\cot(\varphi\pm h).$$

Fatte allo stesso modo due altre simili osservazioni, e ad ora diversa si otterrà

$$\sec\theta=T'\cot(\varphi\pm h'),$$

e quindi

$$\frac{T}{T'}=\frac{\cot(\varphi\mp h')}{\cot(\varphi\mp h)},$$

ora fatto

$$(1+\text{tang}\,h\,\text{tang}\,h')(T-T')=M',\quad T\,\text{tang}\,h-T'\text{tang}h'=N$$

si ha

$$(17)\quad \text{tang}\,\varphi=\frac{\mp M'\pm\sqrt{[M'^2+4N(T\,\text{tang}\,h'-T'\,\text{tang}h)]}}{2N}.$$

Facendo le due prime osservazioni a mezzodì, le due ultime alle tre si avrà

$$\text{tang}\,\varphi=\frac{\mp\left(\frac{T}{T'}-1\right)\pm\sqrt{\left(1+\frac{T^2}{T'^2}-6\frac{T}{T'}\right)}}{2},$$

e vale il segno superiore della parte razionale quando si fanno tre ore prima di mezzodì. Facendo le due prime alle tre pom. e le due ultime alle dieci antim. la (17) dà

$$\tan\varphi = \frac{\pm(1-\sqrt{3})(T-T')\pm 2\sqrt{\left[(T^2+T'^2)\left(1-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)-TT'(6-\sqrt{3})\right]}}{2(T+T'\sqrt{3})}$$

7. Quinto metodo per conoscere φ e θ in un piano qualunque.

Sia ABC il meridiano (Fig. 11), NBC l'equatore; EBG il piano dell'orologio, MB la meridiana, EF la verticale. Da un punto qualunque E della meridiana si abbandoni a se stesso un grave, che percorra la linea retta EG, sarà il piano GEF normale ad EBG, EFB $=$ L latitudine geografica.

Misurato l'angolo PEB compreso dalla verticale PE diretta dal basso all'alto, e dalla meridiana EB diretta verso il polo opposto, e misurato l'angolo BEG compreso dalla stessa parte di meridiana, e dalla retta percorsa dal mobile computata dal punto di partenza E verso il suo termine, mettasi ang.PEB$=m$, ang.BEG $=n$, si avrà pel triangolo sferico Eabc rettangolo in b

$$\cos(bac)=\cos(b'a'c')=-\cot m \tan n$$

e pel triangolo sferico B$a'b'c'$

$$\cot(a'c'b')=\cot\theta=\cos(m-\mathrm{L})\mathrm{sen}(c'a'b')$$

$$\tan(c'\mathrm{B}b')=\tan\varphi=\mathrm{sen}(m-\mathrm{L})\tan(c'a'b')$$

cioè quando $m>\mathrm{L}$

$$(18)\left\{\begin{aligned}\cot\theta &=\cos(m-\mathrm{L})\sqrt{\left[1-\left(\frac{\tan n}{\tan m}\right)^2\right]}\\ \tan\varphi &=-\frac{\tan m\ \mathrm{sen}(m-\mathrm{L})}{\tan n}\sqrt{\left[1-\left(\frac{\tan n}{\tan m}\right)^2\right]}\end{aligned}\right.$$

Quando il grave corre nell'emisfero orientale l'angolo φ è negativo, quando nell'emisfero occidentale è φ positivo.

Misurato m ed n al modo stesso se $m<\mathrm{L}$, se ne deducono facilmente le altre equazioni da usarsi

$$(19)\begin{cases} \cot\theta = \operatorname{sen}(m+L)\sqrt{\left[1-\left(\frac{\tang n}{\tang m}\right)^2\right]} \\ \tang\varphi = \frac{\tang m}{\tang n}\cos(m+L)\sqrt{\left[1-\left(\frac{\tang n}{\tang m}\right)^2\right]}. \end{cases}$$

È poi φ negativo quando il grave corre verso l'emisfero occidentale, positivo se verso l'opposto.

§. VI.

METODI PER CONOSCERE L'ANGOLO ψ NEI PIANI VERTICALI.

1. Primo metodo con due osservazioni.

Nel piano verticale FMA (Fig. 12) si fissi una perpendicolare FB $=$ P di misurata lunghezza. Pel suo piede F si conduca l'orizzontale FG sul medesimo piano. Supponga BMA il piano del meridiano, MA la meridiana verticale, BM lo gnomone K, sarà l'angolo BGF $=\psi$, FG $=$ P$\cot\psi$.

In una nota ora del giorno cada in C l'estremo dell'ombra di P, misurata la verticale NC che passa per questo punto, mettasi CN $=$ E, FN $=$ B. Alla stessa ora sarebbe CM l'ombra di BM $=$ K, e CMA $=$ H$'''$ l'angolo della sostilare colla verticale, laonde avrebbesi

$$\tang H''' = \frac{CA}{AM} = \frac{NG}{NC+MG} = \frac{P\cot\psi - B}{E+(MG)}$$

Ciò premesso l'angolo hMB è eguale alla latitudine L, BMG $= 90^\circ - L$, BGM $= 90^\circ$, hM $=$ BG essendo hM orizzontale ed hB verticale, e quindi

$$BG = \frac{P}{\operatorname{sen}\psi} = K\cos L,$$

K $=$ P sec L cosec ψ, MG $=$ K sen L $=$ P tang L cosec ψ, per mezzo delle quali relazioni si ottiene

$$\operatorname{tang} H''' = \frac{P \cot \psi - B}{E + P \operatorname{tang} L \operatorname{cosec} \psi}.$$

Per una simile esperienza alla stessa ora, essendo H''' il medesimo, si otterrà

$$\frac{P \cot \psi - B}{E + P \operatorname{tang} L \operatorname{cosec} \psi} = \frac{P \cot \psi - B'}{E' + P \operatorname{tang} L \operatorname{cosec} \psi},$$

da cui ricavasi, facendo per brevità

$$(B'E - BE)(E' - E) = M'', \quad (E' - E)^2 - (B' - B)^2 \operatorname{tang}^2 L = N'$$

$$(20) \quad \cot \psi = \frac{M'' \pm \sqrt{[M''^2 + N'^2 P^2 ((B' - B)^2 P^2 \operatorname{tang}^2 L - (B'E - BE')^2)^2]}}{N'P}$$

2. Secondo metodo con tre osservazioni

Si hanno con ciò due equazioni, eliminandone il termine costante P tang L cosec ψ, ne risulta l'equazione

$$(21) \quad P \cot \psi = \frac{(E'B - EB')(B'' - B) + (EB'' - E''B)(B' - B)}{(E - E''')(B' - B) + (E' - E)(B'' - B)}.$$

3. Terzo metodo con una sola osservazione.

Poichè l'angolo orario H'' si computa dalla retta OO', e l'angolo H''' dalla meridiana OM (Fig. 3. §. II) sarà

$$H''' = MOO' - H'',$$

come pure

$$\operatorname{tang} H''' = \frac{\pm \operatorname{tang} h \sec \theta \sec^2 \varphi}{1 \mp \operatorname{tang} h \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang}^2 \theta + \sec^2 \theta \operatorname{tang}^2 \varphi}$$

per essere

$$\operatorname{tang}(MOO') = \sec \theta \operatorname{tang} \varphi \quad \text{e} \quad \operatorname{tang} H'' = \sec \theta \operatorname{tang}(\varphi \mp h).$$

per la prima delle (7).

Eliminando φ e θ colle (8), ed avvertendo all' equazione trovata al principio di questo §, dopo le riduzioni si otterrà

$$(22)\begin{cases} \text{E} \cos \text{L} \operatorname{tang} \psi \sqrt{(1+\operatorname{tang}^2\psi)} + \operatorname{tang}^2\psi (\text{P} \operatorname{sen} \text{L} \mp \text{B} \cot h) \\ \qquad - \operatorname{tang} \psi (\text{B} \operatorname{sen} \text{L} \pm \text{B} \cot h) + 2\text{P} \operatorname{sen} \text{L} = 0 \end{cases}$$

la quale fa noto tang ψ con una sola osservazione all'ora $\pm h$.

4. Fatte due osservazioni ad ore qualunque, si avranno due equazioni simili alla precedente, fra le quali eliminando la costante

$$\cos \text{L} \operatorname{tang} \psi \sqrt{(1 + \operatorname{tang}^2 \psi)},$$

si avrà

$$(23)\begin{cases} \operatorname{tang}^2\psi\Big(\text{P} \operatorname{sen} \text{L}(\text{E} - \text{E}') \pm \text{N}\Big) - \operatorname{tang}\psi\Big(\operatorname{sen}\text{L}(\text{B}'\text{E} - \text{BE}') \pm \text{Q}\Big) \\ \qquad + 2\text{P} \operatorname{sen} \text{L}(\text{E} - \text{E}') = 0 \end{cases}$$

in cui

$$\text{N} = \text{EB}' \cot h' - \text{E}'\text{B} \cot h, \quad \text{Q} = \text{E} \cot h' - \text{E}' \cot h.$$

Dopo una terza osservazione, ottenendosi un'altra equazione simile alla precedente, ed eliminandone P sen L, ne risulterà

$$(24)\ \operatorname{tang}\psi = \frac{\pm \operatorname{sen}\text{L}(\text{EF} + \text{E}'\text{F}' + \text{E}''\text{F}'') - (\text{D}\cot h + \text{D}'\cot h' + \text{D}''\cot h'')}{\text{BD} \cot h + \text{B}'\text{D}' \cot h' + \text{B}''\text{D}'' \cot h''}$$

posto per brevità

$$\text{E}'' - \text{E}' = \text{D}, \quad \text{E} - \text{E}'' = \text{D}', \quad \text{E}' - \text{E} = \text{D}'',$$

$$\text{B}' - \text{B}'' = \text{F}, \quad \text{B}'' - \text{B} = \text{F}', \quad \text{B} - \text{B}' = \text{F}''.$$

Allorchè l'ombra è orizzontale si avrà $\text{E} = 0$, e la (22) si abbassa al secondo grado; in questa circostanza però è da preferirsi però un' altra formola molto più semplice; infatti l'angolo che fa il raggio solare nell'ora h col meridiano ha per tangente

$$\frac{\operatorname{sen} h}{\sqrt{(\cos^2 h + \operatorname{tang}^2\delta)}},$$

l'angolo che fa col piano verticale ha per tangénte $\frac{P}{B}$, l'angolo ψ ne é la differenza, dunque

$$(25)\qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{\operatorname{sen} h - \frac{P}{B}\sqrt{(\cos^2 h + \operatorname{tang}^2 \delta)}}{\frac{P}{B}\operatorname{sen} h + \sqrt{(\cos^2 h + \operatorname{tang}^2 \delta)}}.$$

Facendo l'osservazione a mezzodì la (22) dà $\operatorname{tang}\psi = \frac{P}{B}$.

Pag.	lin.	ERRORI	CORREZIONI
214	9	$=\operatorname{sen}(\varphi\mp H)$	$=m\operatorname{sen}(\varphi\mp H)$
ivi	17	descritto finalmente il semicerchio sarà SE $= x''$.	x'' sarà quarta proporzionale dopo CB, EQ, PE.
216	21	$\pm \operatorname{sen} L \cot H$	$\pm \sec L \cot H$

SOLUZIONE ANALITICA DEL PROBLEMA DELLE OSCILLAZIONI DEL PENDOLO AVUTO RIGUARDO ALLA ROTAZIONE DELLA TERRA

DEL SIG. PROF. F. MOSSOTTI

SQUARCIO DI LETTERA

AL P. SERPIERI

Pregiatissimo Sig. Professore

Pisa li 18 aprile 1851.

Per corrispondere anche alla seconda parte del suo invito ho profittato d'alcuni momenti liberi, che mi lascia la pubblicazione della Meccanica, per occuparmi della soluzione analitica del problema delle oscillazioni del pendolo avuto riguardo alla rotazione della terra.

Le formole di Lagrange, *Mécanique analytique* Tom. II. pag. 227, quelle di Coriolis, *Journal de l'école polytechnique* cahier XXI, pag. 275, e cahier XXIV, pag. 142, e per ultimo di Poisson *idem* cahier XXVI pag. 21 possono essere impie-