

L'astrolabio lineare di al-Tusi applicazioni gnomoniche

Nella presente nota sono riassunti i risultati di una ricerca storica sull'astrolabio lineare di al-Tusi, finalizzata alla costruzione e metodologia di utilizzo di questo strumento astronomico medievale di origine islamica.

Massimo Goretti

Sharaf al-Din al-Muzaffar ibn Mohammed al-Tusi, nacque a Tus, nel Khorassan (regione a circa 1000 Km da Teheran nel nord-est ai confini dell'Afganistan) nel 1156 e morì a Bagdad nel 1242. Nel mondo islamico, dal punto di vista astronomico, è considerato talmente grande che i suoi contemporanei lo compararono a Tolomeo.



Il suo astrolabio è descritto nel "Traité des instruments" di Abou'l-Hacan Ali Ibn Omar Merrakèchi.

Il capitolo relativo a quest'astrolabio è stato tradotto nel 1895 dal Barone Carra de Vaux nel "Journal Asiatique" con il titolo "L'astrolabe linéaire ou baton d'Al-Tousi."

Successivamente nel 1943 H. Michel ne parla nel cap. XIV e XV del suo libro "Traité de l'astrolabe" e costruisce un esemplare conservato al museo della scienza di Oxford.

Nel 1999 R. D'Hollander ne riprende la trattazione nel cap. VI del suo trattato "L'Astrolabe – Histoire, théorie et pratique"

Nel 2007 J. E. Morrison nel suo "The astrolabe" da pag.287 a pag.292 riprende l'argomento in modo originale e diverso dai precedenti

In questa cronistoria è interessante il prologo del libro del Barone Carra de Vaux in cui si parla per la prima volta di questo strumento e l'interesse che suscitò. Ne riporto le sue parti essenziali:

Nella "Mémoire sur les instruments astronomiques des arabes" di L.A. Sedillot, in vari punti si parla del "astrolabe linéaire ou baguette de Nasir ed Din Tousi", ma in nessuna parte si trova una descrizione dello stesso; Sedillot promette un lavoro su Nasir ed Din, nel quale tratterebbe la baguette de Tousi, quest'opera di Sedillot tuttavia non è mai apparsa; per di più vi era ancora il notevole dubbio che questo strumento e l'asta Jacob fossero la stessa cosa.

La chiarezza su quest'argomento era rimandata alla traduzione del manoscritto arabo di cui si era assunto il compito il sig. Barone Carra de Vaux .

Dalla traduzione la prima cosa che è emersa è che Sédillot abbia commesso un errore, attribuendo il bastone al celebre Nasir-ed Din al-Tusi; il vero inventore è invece Sharaf al-Din al-Muzaffar ibn Muzaffar al-Tusi, un contemporaneo di Kemal ed Din Ibn Yunus che visse dal 1156 al 1242.

Nella prima parte del manoscritto si trova la sua descrizione che, da sola, sarebbe stata sufficiente a far comprendere che questo bastone è una specie molto particolare d'astrolabio. Nella seconda parte si spiega il suo utilizzo. Non sono presenti disegni o schemi dello strumento.

I risultati essenziali di questo studio potrebbero essere riassunti come segue:

- 1) L'astrolabio lineare è un vero astrolabio, esso deriva da quello planisferico e, come quest'ultimo, è in linea di principio un piano su cui si proiettano la sfera celeste e i diversi cerchi di declinazione; su una retta particolare di questo piano è eseguita la proiezione di questi punti.
- 2) Lo strumento somiglia in pratica, per il suo aspetto e per gli usi, a un regolo calcolatore.
- 3) La misura degli angoli si fa per mezzo di fili aggiunti al bastone: essi danno le lunghezze delle corde sottese agli archi e per mezzo di graduazioni tracciate sulla riga si ricavano i corrispondenti angoli.

La realizzazione di quest'astrolabio, nelle sue fasi iniziali, fa riferimento alla costruzione classica degli astrolabi planisferici utilizzando il principio della proiezione stereografica in cui l'osservatore è collocato al polo sud della sfera celeste. (Fig.1)

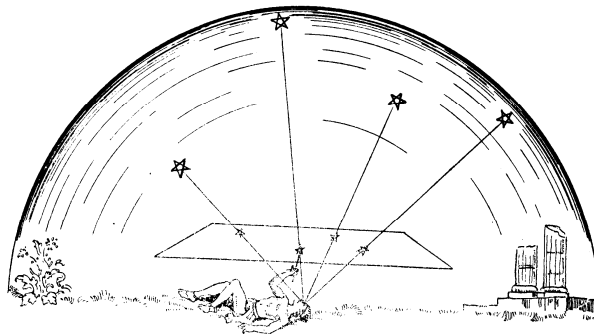


Fig.1

Questo comporta le seguenti limitazioni:

- 1) l'astrolabio ha validità per latitudini prossime a quella di costruzione (nel seguito di questo articolo si è assunta una latitudine $\varphi=43^\circ$)
- 2) l'astrolabio è costruito in una certa data, quindi, poiché l'ascensione retta e la declinazione degli astri variano lentamente, ma continuamente nel tempo, si commette un errore legato alla differenza tra la data di lettura e quella di costruzione. Per gli strumenti più grandi e accurati si può considerare una validità di circa 50 anni.

PARTI DELL'ASTROLABIO

Per comprendere le caratteristiche ed i limiti di questo strumento è bene fare riferimento ad uno schema semplificato dell'astrolabio polare. In particolare, come vedremo, il timpano dell'astrolabio è ridotto al tracciato degli almicantrat e la rete è semplificata con l'eclittica e con l'indicazione di un numero limitato di stelle, fra quelle vicine il più possibile al cerchio equinoziale, adeguatamente distribuite in modo che ogni notte sia possibile vederne almeno una.

Cerchi di declinazione

- 1) Si tracci un cerchio di centro O e raggio OF che rappresenta il tropico del Capricorno (FGHI)
- 2) Da F verso I si riporti un angolo pari all'inclinazione dell'eclittica, che individua sulla circonferenza il punto X.
- 3) Si tracci XG; questa incontra la verticale in K. Si tracci il cerchio con raggio OK. Questo circolo è l'equatore.
- 4) Si unisca X con O e s'individuï sull'equatore il punto T; si tracci TL che incontra la verticale in M. Il cerchio con raggio OM rappresenta il tropico del Cancro.

L'espressione trigonometrica dei cerchi di declinazione si riassume in:

$$R = R_e \tan(45^\circ \pm \delta/2);$$

$$R_e = R \gamma = R \frac{\rho}{r} \quad \text{raggio dell'equatore};$$

δ declinazione dell'astro.

Sostituendo a δ i corrispondenti valori di declinazione del Sole ai vari segni zodiacali si ottengono i raggi dei cerchi di declinazione (Fig.2).

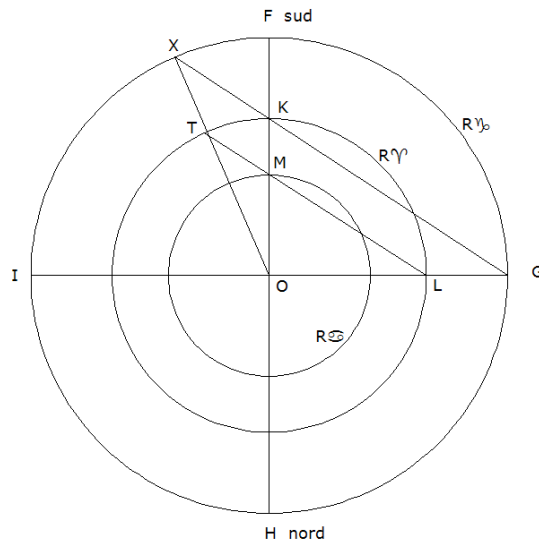


Fig.2

Cerchi d'altezza (almicantarati)

Nella figura sottostante è riportato un metodo per l'individuazione grafica dell'almicantarato sul timpano dell'astrolabio. Il primo cerchio rappresenta l'orizzonte locale.

Operando per via trigonometrica, assunto il punto O come origine, le ordinate dei centri degli almicantarati sono date:

$$C_i = R_e \cos \varphi / (\sin \varphi + \sinh) \quad h = 0^\circ - 10^\circ - \dots - 90^\circ$$

Le ordinate del passaggio degli almicantarati sul cerchio meridiano, verso nord, sono date da:

$$P_i = -R_e \tan[(\varphi - h)/2] \quad h = 0^\circ - 10^\circ - \dots - 90^\circ$$

$$R_e = R \gamma = R \frac{\rho}{r} \quad \text{raggio dell'equatore};$$

φ latitudine del luogo;

h altezza astro.

Si osserva che C_0 rappresenta l'orizzonte e C_{90} lo zenit. (Fig.3)

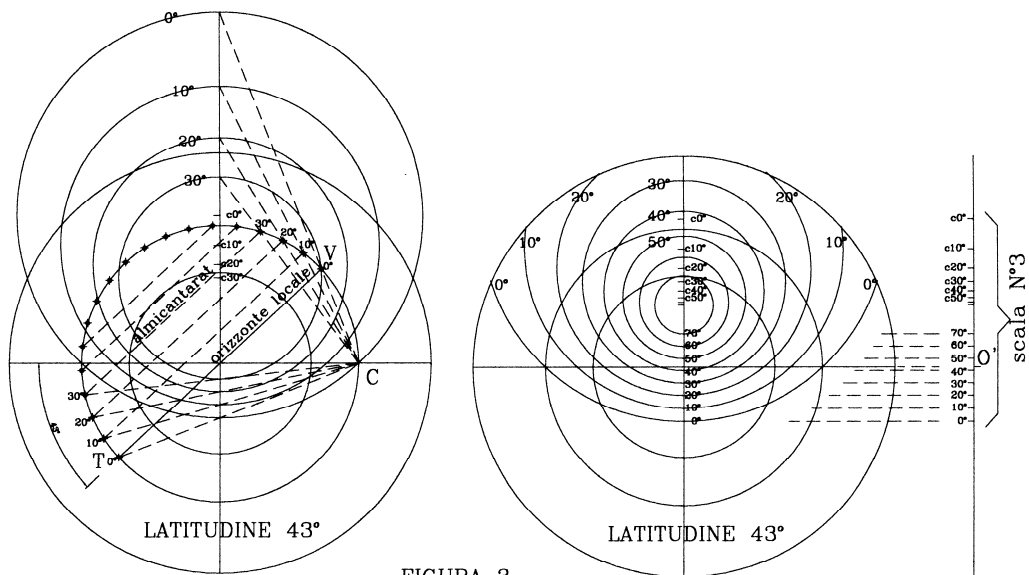


FIGURA 3

Nella figura 4, semplificata, è riportato il timpano dell'astrolabio in cui sono tracciati alcuni cerchi di declinazione del Sole ed almucantarat.

Se facciamo una sezione nel piano meridiano, otteniamo l'astrolabio di al-Tusi, come riportato nella parte destra della figura (Fig.4). In particolare, in luogo dei cerchi, sia di quelli di declinazione che quelli di altezza (almucantarat) sul bastone si riporta una scala con i loro raggi. Per i cerchi di declinazione la soluzione è semplice, perché tutti hanno lo stesso centro; invece per gli almucantarat il problema è più complesso perché per ogni cerchio si hanno due riferimenti: la posizione del centro e il raggio.

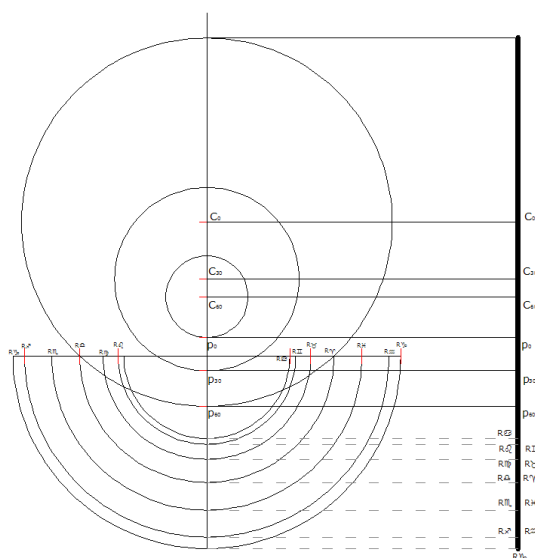


Fig.4

Scala delle corde

Il passo successivo è quello di riportare sul bastone le funzioni rappresentate sull'astrolabio planisferico dal regolo e dalla scala graduata, per risolvere il problema della misurazione degli angoli.

Al-Tusi dimostra qui la sua genialità. Il mondo islamico medievale conosceva la funzione "corda": nota la lunghezza di una corda si può risalire al valore dell'angolo corrispondente (questo metodo era già usato da Tolomeo, nel suo Almagesto). (Fig.5):

$$Cr d\alpha = 2R\sin\alpha/2$$

Nello strumento conviene usare l'arco massimo disponibile: quindi può essere costruita la scala delle corde con

$$aa1 = 2 R \sin\alpha/2$$

dove:

R raggio del cerchio di declinazione Capricorno.

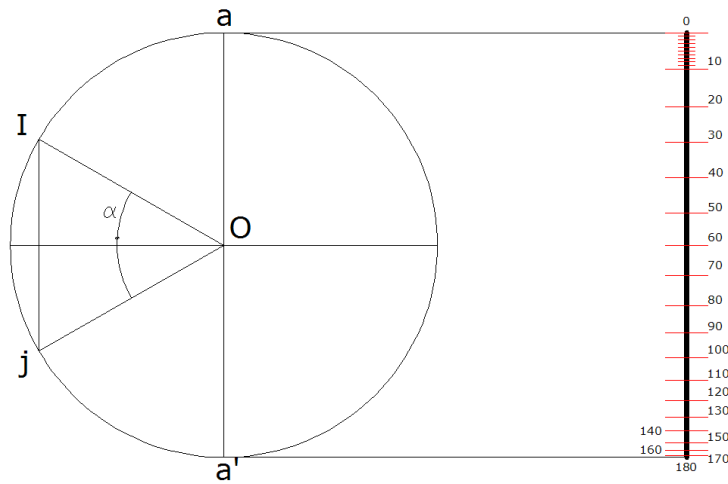


Fig. 5

Scala Ascensioni rette - Cerchi di declinazione delle stelle

L'astrolabio è utilizzato anche di notte per determinare, mediante la misura dell'altezza dell'astro, l'ora corrispondente.

Si ricava l'ora del Sole attraverso la relazione:

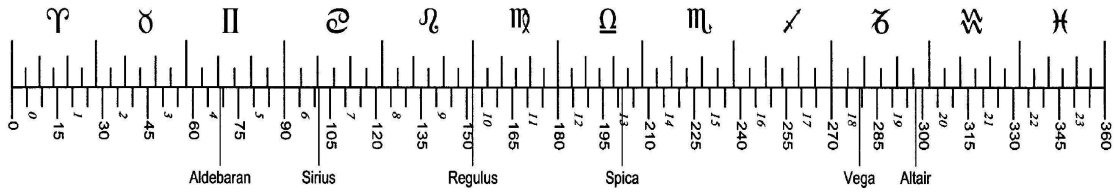
$$T_s = t_* + (AR_* - AR_s)$$

dove t_* è l'ora della Stella.

Occorre costruire una scala in cui è riportata l'ascensione retta del Sole AR_s nel corso dell'anno e la corrispondente ascensione retta della Stella AR_* . Nella figura 6 è riportata questa scala con indicate la posizione di alcune stelle.

Per individuare sulla scala la posizione delle stelle, osserviamo che ruotando la Rete di un astrolabio polare intorno al centro O, ognuno dei suoi punti traccia una circonferenza. Quindi una generica stella S percorre una circonferenza di raggio OS. Come esempio si sono tracciati i cerchi percorsi dall'inizio dei Pesci (e del suo simmetrico Scorpione) e della Stella S.

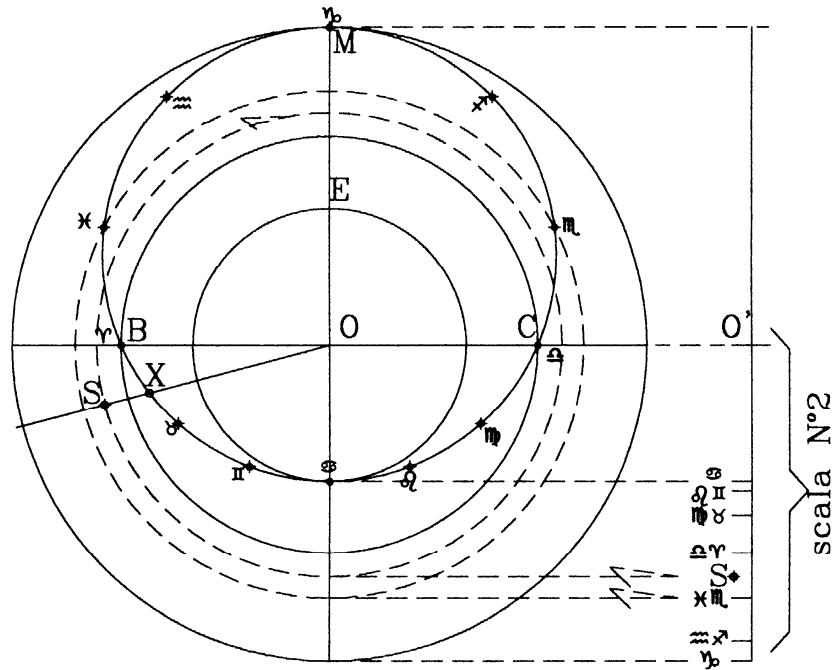
Fig. 6



La figura seguente (Fig. 7) spiega in modo evidente la scala delle declinazioni di cui è dotato lo strumento: O' è il centro dello stesso e la scala indica le distanze $O'D$, $O'E$, $O'F$, ecc., cioè i raggi relativi ai punti di origine di ciascuno dei segni zodiacali. L'astro S (indicato a titolo di esempio) è riportato nella scala 2 al fine di poter ricostruire il cerchio che gli è proprio. La sua ascensione retta AR_s è individuata dal punto X sull'eclittica.

Trigonometricamente il raggio di declinazione della Stella è dato sempre da:

$$R_s = R_e \tan(45^\circ \pm \delta/2) \text{ dove } \delta \text{ è la declinazione astro.}$$



Fili - Pinnule

L'aspetto peculiare di questo astrolabio sono i 3 fili (Fig.8).

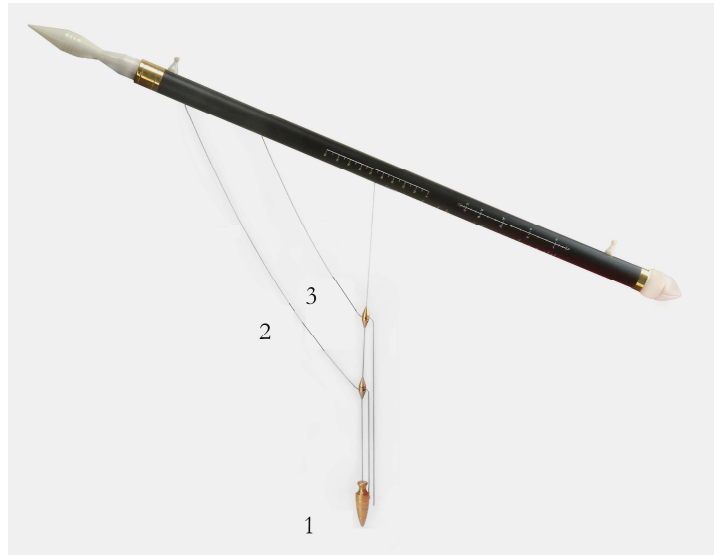


Fig.8

Filo 1 - filo a piombo fissato nel centro O

Filo 2 - filo di misura fissato all'estremità sud

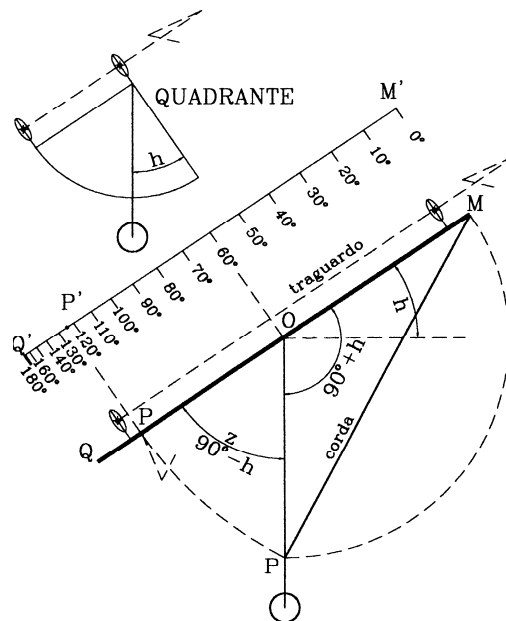
Filo 3 - filo di tensione mobile

Vi sono inoltre due pinnule con la funzione di mira dell'astro.

USO DELL'ASTROLABIO

Sono descritte alcune operazioni che si possono effettuare con l'astrolabio.

Fig.9



L'assetto dello strumento (Fig.9) è molto simile ad un quadrante di altezza (si veda al confronto la piccola figura aggiunta) ed altrettanto il suo utilizzo. Si rileva l'altezza h dell'astro (o l'angolo zenitale z) e la scala delle corde permette di sostituire il goniometro nella misura dell'angolo MOP

Altezza di un astro

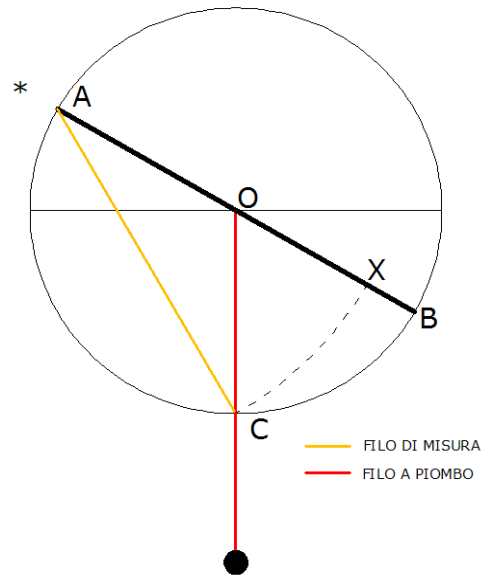


Fig.10

- 1) si punta l'astro attraverso le pinnule (Fig.10)
- 2) si varia la lunghezza del filo di misura in modo tale che il filo a piombo si mantenga verticale
- 3) la lunghezza del filo di misura si riporta sulla scala delle corde e si legge l'angolo AOC. La corda AC è la misura dell'angolo $AOC = (90^\circ + h)$.

L'altezza h dell'astro è data da:

$$h = AOC - 90^\circ$$

Conoscendo l'altezza H massima del Sole

$$H = 90^\circ - \delta - \varphi$$

Si può ricavare l'ora temporaria T usando la formula:

$$\sin(15^\circ T) = \sin h / \sin H$$

Arco semidiurno

L'arco semidiurno è l'ampiezza dell'arco percorso dal Sole dal sorgere al meridiano.

Si voglia determinare l'arco semidiurno il 21 aprile (inizio del Toro.) Fig.11

- 1) si riporti su filo a piombo la distanza $OD = OR \oslash$
- 2) si prenda sul filo di tensione la lunghezza $ED = C_o p_o$ e la si fissi sul filo a piombo in D e C_o
- 3) si ruoti il bastone variando la lunghezza del filo di misura in modo che in filo a piombo rimanga verticale
- 4) l'arco semidiurno è l'angolo EOD , il filo di misura AC sulla scala delle corde non fa altro che definire quest'angolo. Si legga per esempio $AX = 100^\circ$

Il Sole sorge all'ora:

$$t_s = 12h - (100^\circ / 15^\circ)h = 5.34h = \mathbf{5h20min}$$

L'arco semidiurno è dato da:

$$\omega = 12h - 5.34h = 6.66h = \mathbf{6h40min}$$

Il Sole tramonta all'ora:

$t = 12h + 6h40min = 18h40min$

La durata del giorno è:

$T_g = 2\omega = 13h20min$

Osservando che C_0 è il centro dell'almicantarato d'altezza 0° e $R\gamma$ il raggio di declinazione del Toro, il metodo risolve il problema di determinare il punto d'intersezione tra i cerchi d'altezza e di declinazione.

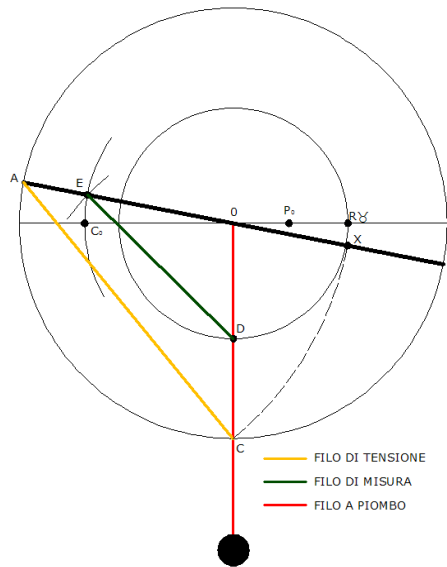


Fig.11

$OD = OR\gamma$ $DE = CoPo$ $AX = 100^\circ$

La giustificazione di quanto esposto si evidenzia nell'osservare quanto succede nell'astrolabio: l'arco generico semidiurno è quello rappresentato in figura ombreggiato compreso tra OA (raggio di declinazione dell'astro) e OCo (raggio dell'almicantarato di altezza $h=0^\circ$). Nell'astrolabio di al-Tusi è quest'angolo che si deve ricostruire attraverso il filo di tensione, mentre il filo di misura, trasportato sulla scala delle corde, ne individua il valore (Fig.12-13)

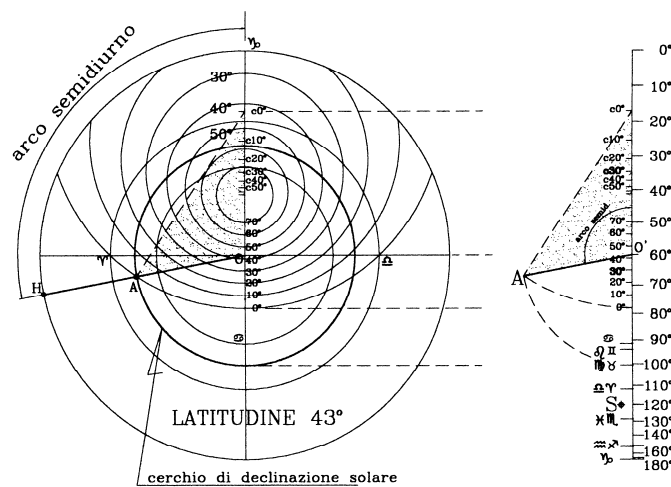


Fig.12

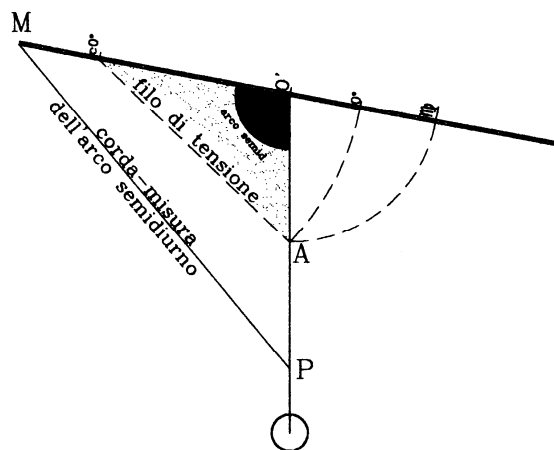


Fig.13

Determinazione dell'ora con il Sole

Il 21 aprile sia rilevata l'altezza del Sole di $h=30^\circ$; si vuole determinare l'ora della misura (Fig.14):

- 1) si riporti su filo a piombo la distanza $OR\gamma$
- 2) si prenda sul filo di tensione la lunghezza $C_{30}P_{30}$ e la si fissi sul filo a piombo e in C_{30}
- 3) si ruoti il bastone variando la lunghezza del filo di misura in modo che in filo a piombo rimanga verticale. In questo modo si definisce l'angolo orario AOD .
- 4) questa lunghezza AC (che è la corda dell'angolo AOD) si riporta sulla scala delle corde e si legge il valore dell'angolo corrispondente: $AX=58^\circ$

L'ora della misura è:

$$t = 12h - (58^\circ / 15^\circ)h = 8.13h = \mathbf{8h8min}$$

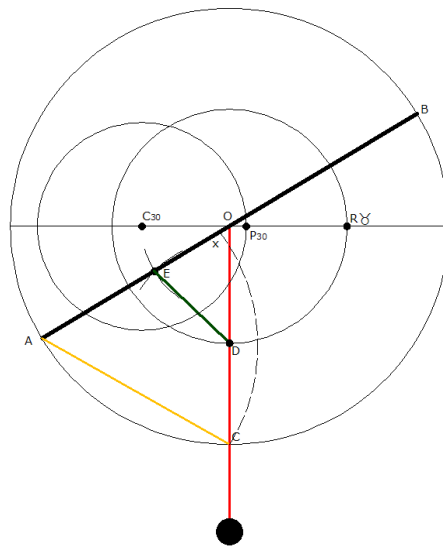


Fig.14

$$OD=OR\gamma \quad DE=C_{30}P_{30} \quad AX=58^\circ$$

Altro esempio:

il 21 dicembre sia rilevata l'altezza del Sole di $h=20^\circ$; si voglia determinare l'ora della misura (Fig.15):

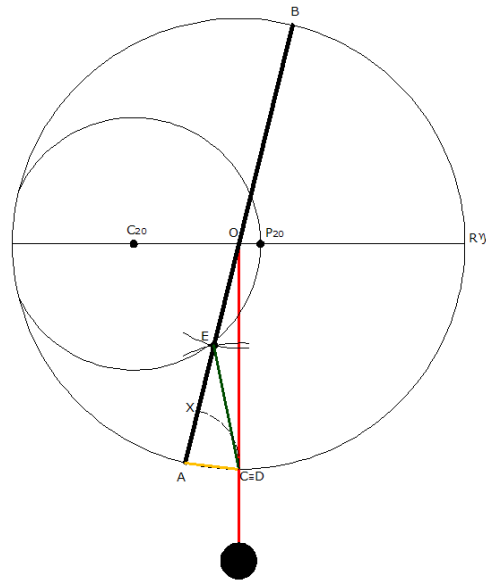


Fig.15

$$OD=OR_{20} \quad DE=C_{20}P_{20} \quad AX = 115^\circ$$

- 1) si riporti su filo a piombo la distanza OR_{20}
- 2) si prenda sul filo di tensione la lunghezza $C_{20}P_{20}$ e la si fissi sul filo a piombo e in C_{20}
- 3) si ruota il bastone variando la lunghezza del filo di misura in modo che in filo a piombo rimanga verticale. In questo modo si definisce l'angolo orario AOD.
- 4) questa lunghezza AC si riporta sulla scala delle corde e si legge il valore $AX=115^\circ$

L'ora della misura è:

$$t = 12h - [(115^\circ - 90^\circ) / 15^\circ]h = 10.33h = \mathbf{10h19min}$$

Determinazione dell'ora nella notte con le stelle

L'operazione è sempre la stessa descritta per l'ora del giorno, ma deve essere eseguita per mezzo della Stella S. Sull'astrolabio si porta il punto della Stella sull'almicantarato trovato (nell'esempio: 20°) il triangolo che si ottiene è ancora sempre SOC_{20} , e lo schema del bastone di al-Tusi è riportato nella Fig. 17.

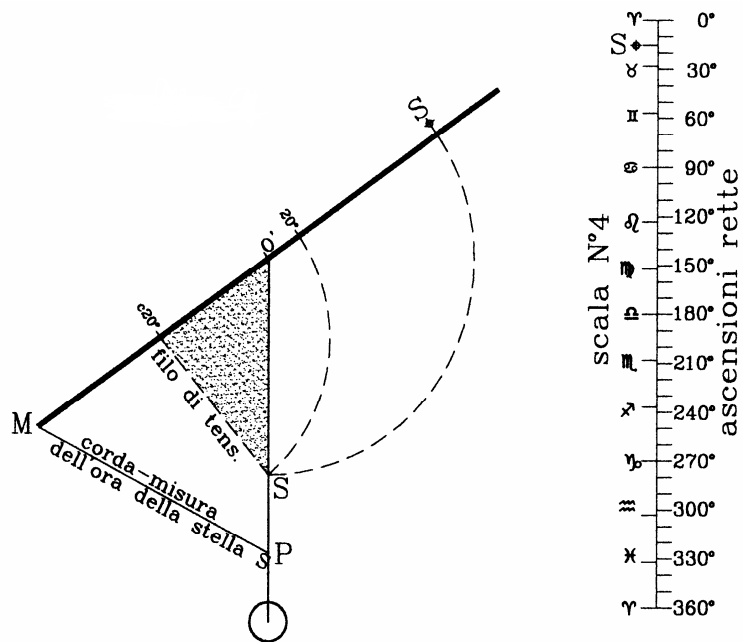
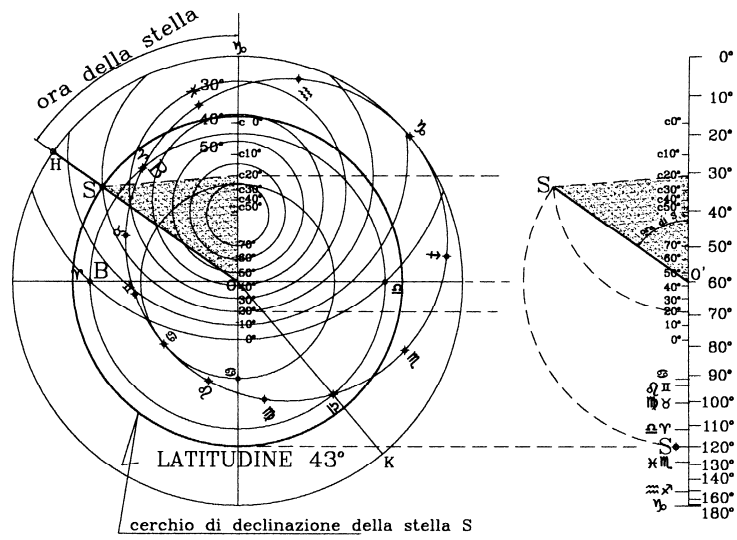
In questo caso, però, si ha l'ora della Stella rispetto alla sua culminazione.

Sull'astrolabio polare, supponendo che il Sole sia all'inizio della Bilancia, si trova facilmente, leggendo nel punto K, l'ora della notte corrispondente.

Per trovare l'ora con il bastone di al-Tusi, occorre conoscere la differenza fra l'Ascensione retta del Sole in quel giorno e l'ascensione retta della Stella. Per tale scopo è costruita sul bastone una tabella delle ascensioni rette.

Si trova così facilmente lo "scarto orario" fra la Stella e il Sole, e si può ricostruire a che ora della notte la Stella si trova in quel punto. A titolo d'esempio, e in modo approssimativo, si consideri il Sole in Bilancia, la cui Ascensione Retta è di 180° , mentre l'Ascensione Retta della Stella è 15° : la differenza è $180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$, corrispondente a 11 ore, che andranno sottratte dall'ora della Stella, per ottenere l'ora locale. (Fig.16)

Fig.16



Ad esempio il 21 aprile sia misurata l'altezza di Spica $h=30^\circ$, si voglia conoscere l'ora della misura (Fig.17)
 L'ora della Stella è data dall'angolo AOD

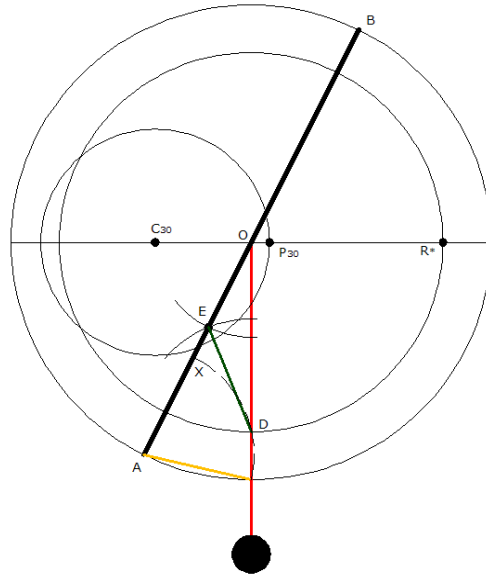


Fig.17

$$OD=OR^* \quad DE= C_{30}P_{30} \quad \mathbf{AX= 27^\circ}$$

L'ascensione retta della Stella è $AR_* = 201^\circ 25'$

L'ascensione retta del Sole è $AR_s = 29^\circ 20'$

La differenza di ascensione retta è:

$$\Delta AR = 172^\circ 5' = 11.47 \text{ h}$$

- 1) si riporti su filo a piombo la distanza OR^*
- 2) si prenda sul filo di tensione la lunghezza $C_{30}P_{30}$ e la si fissi sul filo a piombo e in C_{30}
- 3) si ruoti il bastone variando la lunghezza del filo di misura in modo che in filo a piombo rimanga verticale
- 4) questa lunghezza AC , che rappresenta la corda dell'angolo AOD , si riporta sulla scala delle corde e si legge il valore $AX = 27^\circ$

L'ora della misura è:

$$t = (180^\circ - 27^\circ) / 15^\circ \text{h} + 11.47 \text{h} = 21.67 \text{h} = \mathbf{21\text{h}40\text{min}}$$

Si osserva che se sul bastone si costruisce sul filo a piombo la distanza OD uguale al raggio di declinazione della Stella, sul filo di tensione la lunghezza DE uguale al raggio dell'almicantarato relativo all'altezza misurata, l'angolo AOD è l'ora della Stella e la lunghezza AC del filo di misura fornisce il valore di tale angolo.

Ad ulteriore chiarimento: il 21 giugno si misura l'altezza di Altair $h=30^\circ$, si vuole conoscere l'ora della misura (Fig.18)

- 1) si riporti su filo a piombo la distanza $OR^*=OD$
- 2) si prenda sul filo di tensione la lunghezza $C_{30}P_{30}$ e la si fissi sul filo a piombo ed in C_{30}
- 3) si ruoti il bastone variando la lunghezza del filo di misura AC in modo che in filo a piombo rimanga verticale
- 4) questa lunghezza AC si riporta nella scala delle corde e si legge il valore $AX = 52^\circ$

Ascensione retta della Stella: $AR_* = 19.51 \text{h}$

Ascensione retta del Sole: $Ars=6h$

$\Delta AR=13.51h$

L'ora della misura è:

$t=[(180^\circ-52^\circ)/15^\circ]h+13.51h=22.04h=22h2min$

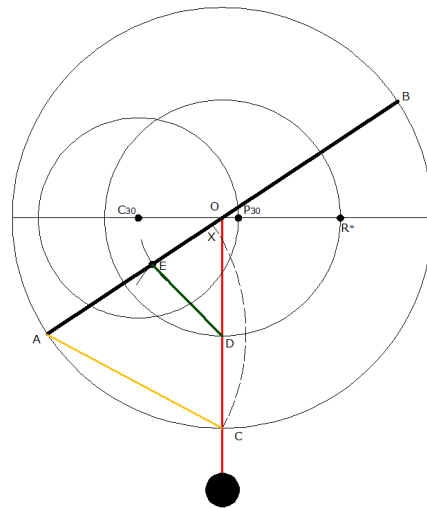


Fig.18

$$OD=OR^*= \quad DE= C_{30}P_{30} \quad \mathbf{AX= 52^\circ}$$

Conclusioni

Quanto esposto evidenzia la genialità di questo semplice strumento, costituita dalla facilità di costruzione, dall'uso di materiali poco pregiati e dalla semplicità nell'utilizzo, che permette di sostituire i grandi e costosi astrolabi con un semplice bastone.

Esso funziona come un regolo calcolatore con il quale si possono risolvere tutti i problemi trigonometrici dell'astronomia posizionale.

Come aspetti negativi è da evidenziare l'uso un po' laborioso e la scarsa precisione. La costruzione e l'uso dello strumento, inoltre, deve essere supportato da una buona conoscenza di astronomia e di matematica.

Vorrei concludere, con un po' d'amarrezza, con le parole di H. Michel (Ciel et Terre - 1943) "*Verosimilmente il bastone non aggiungeva niente di prezioso ai collezionisti di astrolabi e non poteva giustificare l'onore delle loro vetrine. Per questo non sono conservati. Purtroppo questa è la sorte degli strumenti troppo modesti.*"

Ringraziamenti: Si ringraziano l'amico Alessandro Gunella e Jim Morrison per i preziosi e decisivi suggerimenti. *A mia moglie*

Bibliografia

E. Danti: Dell'uso al fabbrica dell'astrolabio - Giunti 1578

L.A. Sedillot: Mémoire sur les instruments astronomiques des arabes – A l'Académie Royal des inscriptions at belles-lettres de l'Institute de France. Paris 1844

M.Le Baron Carra de Vaux: L'astrolabe linéaire ou baton d'Al-Tousi – Journal Asiatique Paris 1895

H. Michel: L'astrolabe linéaire d'al-Tusi - Ciel et Terre – Brussels 1943

H. Michel: Traité de l'astrolabe. - Paris, 1947

R. D'Hollander: L'Astrolabe – Histoire, théorie e pratique. Institut océanographique – Paris, 1999.

J. E. Morrison: The astrolabe 2007